線織面の自己同型群について (代数多様体、複素多様体の理論)

AUTHOR(S):

丸山, 正樹

数理解析研究所講究録
116巻 1971年 33-44

線織面の自己同型群について.

京大 理　丸山 正樹

§1　序

代数的多様体の自己同型群に"代数群"の構造(連結成分の数が可算無限個かもしれない)が自然に入るのは古くから知られている. また, n次射影空間$\mathbb{P}^n$の非特異超曲面の自己同型群の計算は, [6]において詳しく述べられている. ところで代数曲面の場合を考えてみると, 自己同型群の連結成分(単位元を含むもの)の線型部分が自明でない時, その曲面が線織面に双有理になり, 線型部分が自明で連結成分の次元が1ならば楕円曲面, 次元が2ならばアーベル多様体になる[4].

この小論の目的は線織面の自己同型群を計算し, その応用を述べることにある. いずれどこかに発表するつもりなので詳しい証明などは述べない.

以下kを任意標数の代数的閉体, Xをk上定義された完備な非特異既約代数曲線とする. (S, X, π)でX上の線織面S

と，SからXへの自然な射影π（i.e. $S \xrightarrow{\pi} X$, $\pi^{-1}(x)=\mathbb{P}^1$, $\forall x\in X$）の組を表わす．$\mathrm{Aut}(S)$をSの自己同型群，$\mathrm{Aut}_X(S)=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(X)\mid \sigma\circ\pi=\pi\}$とする．$\mathrm{Aut}^0(S)$, $\mathrm{Aut}^0_X(S)$等でそれぞれの単位元を含む連結成分を表わす．

主目標は，線織面(S,X,π)について$\mathrm{Aut}(S)$を求めることにあるが，方針は次の様である：よく知られている様に線織面(S,X,π)が与えられた時，X上階数2のベクトルバンドルEが存在して，$(S,X,\pi)\cong(\mathbb{P}(E),X,\pi')$となる．そこで，まず$\mathrm{Aut}(E)$を調べ，次に$\mathrm{Aut}_X(\mathbb{P}(E))$を調べ，最後に$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(E))$まで持っていく．それぞれ途中を適当な補題でつなぐわけである．

§2 Aut(E).

EをX上の階数2のベクトルバンドルとする．Eの階数1の部分バンドルの全体を考えると，そのdegreeは上に有界である．そこで最大のdegreeを持つ部分バンドルを極大部分バンドルと言い，そのdegreeを$M(E)$で表わす．$N(E)=\deg E-2M(E)$とおく．

定理1．EをX上の階数2のベクトルバンドルとする．

(1) $N(E)>0 \Longrightarrow \mathrm{Aut}(E)\cong G_m$

(2) $N(E)\leqq 0$, E indecomposable, L極大部分バンドル（こ

の場合は一意的) $\Longrightarrow$ $\mathrm{Aut}(E) \cong H_r$

ここで, $r = \dim \Gamma(X, (\underline{\det E})^{-1} \otimes \underline{L}^2)$,

$$H_r = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & t_1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \alpha & t_r \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right) \in GL(2,k) \times \cdots \times GL(2,k), \;\middle|\; \begin{matrix} \alpha \in G_m \\ t_i \in k \end{matrix} \right\}$$

とおく.

(3) $E \cong L_1 \oplus L_2$, $\deg L_1 \geqq \deg L_2$, $L_1 \not\cong L_2 \Rightarrow \mathrm{Aut}(E) \cong H'_r$

ここで, $r = \dim \Gamma(X, (\underline{\det E})^{-1} \otimes \underline{L}_1^2)$,

$$H'_r = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & t_1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \alpha & t_r \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right) \in GL(2,k) \times \cdots \times GL(2,k) \;\middle|\; \begin{matrix} \alpha, \beta \in G_m \\ t_i \in k \end{matrix} \right\}$$

とおく。

(4) $E \cong L \oplus L \Rightarrow \mathrm{Aut}(E) \cong GL(2,k)$.

証明には次の補題を使う. 少し工夫がいるがそれほど難しくない.

補題1 Eを定理1と同じとし, L_1, L_2 をEの極大部分バンドルで互に異るとする $\Longrightarrow E \cong L_1 \oplus L_2$.

この補題は [2] の補題1.5 である.

§3. $\mathrm{Aut}_X(S)$

(S, X, π) を線織面とする. X上の階数2のベクトルバンドルEが存在して, $(S, X, \pi) \cong (P(E), X, \pi')$ となる. すなわち $\exists \varphi : S \xrightarrow{\sim} P(E)$, $\pi = \pi' \cdot \varphi$ となる. 次の補題は A. Grothendieck によるものである [1]

補題2、Eを連結な局所ネーター前概型Y上のベクトルバンドルとする。$\Delta=\{\bar{N} \mid \bar{N}$は$E\otimes N\cong E$となるような階数1のベクトルバンドルの同型類$\}$とおく。この時，次の完全系列がある；

$$e \longrightarrow \mathrm{Aut}(E)/\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y^*) \longrightarrow \mathrm{Aut}_Y(P(E)) \longrightarrow \Delta \longrightarrow e .$$

我々の場合は，$Y=X$だから$\Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)=G_m$，で$\Delta$はJacobi多様体の2-torsion partの部分群になる。Δについて次の補題がある。

補題3 (1) $N(E)\leqq 0$，$N^2\cong I$（自明なバンドル）となる任意のバンドルについて $E\ncong L\oplus(L\otimes N) \Rightarrow \Delta=\{e\}$

(2) $E\cong L\oplus(L\otimes N)$，$N^2\cong I$，$N\ncong I \Rightarrow \Delta\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(3) $E\cong L\oplus L \Rightarrow \Delta=\{e\}$.

$P(E)$のsection sが最小のself-intersection numberを持つ時，それをminimal-sectionと呼ぶ。sがminimal sectionとすると$(s\cdot s)=N(E)$ （$N(E)$は$P(E)$にのみよる，以下$N(P(E))$, $N(S)$の記号を使う。またminimal-sectionとEの極大部分バンドルの間に一対一対応がつき，Lを極大部分バンドルとすると，

$(\det E)\otimes L^{-2}$がきめるX上のdivisor class $=\pi(s\cdot s)$ （sとsとの交わりをXの上に射影したdivisor class）

したがって，補題2，3を使うと定理1は次の定理2の形になる。

定理2. (S, X, π) を線織面とする.

(1) $N(S) > 0 \Rightarrow \mathrm{Aut}_X(S) \cong \Delta$, Δは補題2の中で定義された有限群 ($\subseteq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{\oplus g}$, gはXの種数) ただし, 補題2のEは, ここでは $(\mathbb{P}(E), X, \pi') \cong (S, X, \pi)$ となるもの.

(2) $N(E) \leqq 0$, S indecomposable (i.e. $(S, X, \pi) \cong (\mathbb{P}(E), X, \pi')$ となるEが indecomposable) $\Rightarrow \mathrm{Aut}_X(S) \cong \underbrace{G_a \times \cdots \times G_a}_{r}$,

$r = \dim|-\pi(\Delta\cdot\Delta)|+1$, ΔはSの一意的な minimal section.

(3) S : decomposable で $\pi(\Delta\cdot\Delta) = \pi(\Delta'\cdot\Delta')$ となるような異る minimal sections Δ, Δ' を持たない $\Rightarrow \mathrm{Aut}_X(S) \cong \overline{H}'_r$.

ここで, $r = |-\pi(\Delta\cdot\Delta)|+1$, Δ minimal section, $\overline{H}'_r =$

$$\left\{\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha & t_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}\alpha & t_r\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \,\middle|\, \begin{array}{c} t_1, \cdots, t_r \in G_m \\ \alpha \in k \end{array}\right\}.$$

(4) S : decomposable, $S \not\cong \mathbb{P}^1 \times X$, Sは $\pi(\Delta\cdot\Delta) = \pi(\Delta'\cdot\Delta')$ となるような異る minimal-sections をもつ $\Rightarrow \mathrm{Aut}_X(S) \cong \left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in G_m\right\}$ $\cup \left\{\begin{pmatrix}0 & \beta\\ 1 & 0\end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in G_m\right\}$. ただし積は行列の積として演算し, さらに適当なスカラーで割って上の群に入るようにする.

(5) $S \cong \mathbb{P}^1 \times X \Rightarrow \mathrm{Aut}_X(S) \cong PGL(1, k)$.

§4 Aut(S)

次の補題は明らかであろう.

補題4 (S, X, π) を線織面とし, $S \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とする. この時次の完全系列がある.

$$e \longrightarrow \mathrm{Aut}_X(S) \longrightarrow \mathrm{Aut}(S) \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(X) .$$

実は，代数的多様体の自己同型群は本来，自己同型関手を表現するものとしてとらえるべきである．kは閉体であり，S，Xは完備であるから$\mathrm{Aut}(S)$，$\mathrm{Aut}(X)$は$(Sch/k)_{red}$上での関手を表現するものである[6]．また$\mathrm{Aut}_X(S)$も関手$\mathcal{A}ut_{S/X}(T) = \ker(\mathcal{A}ut_S(T) \longrightarrow \mathcal{A}ut_X(T))$を表現する．したがって，上の完全列は代数群としての完全列である．(i.e. 代数群として$\ker f \cong \mathrm{Aut}_X(S)$)．

Xの種数が2以上であれば$\mathrm{Aut}(X)$は有限群であるから，$\mathrm{Aut}^0(S)$を考える限りにおいて問題はない．また，[2]で調べた命題を使えば，Xが楕円曲線で$N(S)>0$ならば$\mathrm{Im} f$が有限群であることがわかる．

したがって，残ったのは次の場合である．

(1) $S \cong \mathbb{P}^1 \times X$

(2) X 有理曲線，$S \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

(3) X 楕円曲線，S indecomposable

(4) X 楕円曲線，S decomposable，$N(S)=0$，さらに$S \not\cong \mathbb{P}^1 \times X$．

(1)の場合は$X \not\cong \mathbb{P}^1$ならば$\mathrm{Aut}(S) \cong \mathrm{Aut}(X) \times PGL(1)$となり$X \cong \mathbb{P}^1$ならば$\mathrm{Aut}(S) \cong \{PGL(1) \times PGL(1)\} \cup \{V(PGL(1) \times PGL(1))\}$．
ここで，Vは$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \ni (x,y) \longrightarrow (y,x) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$なる自己同型であ

る．

(2)に含まれる曲面は，所謂 Hirzebruch surface Σ_n $(n>0)$ であり，(3)に含まれる曲面は2つの同型類 P_0, P_{-1}（Atiyahの記号，我々は[2]において P_0, P_2 なる記号を使った）がある．また(3)に含まれるものは $\mathbb{P}^1$ で parametrize されている．

次の補題が基本的である．

補題5. (i) 上の(2)と(3)の場合には，補題4の f は全射である．

(ii) 上の(4)の場合，s を S の minimal section として $\pi(s\cdot s)=x_0-x$ とおく，ここで，x_0 を X のアーベル多様体としての単位元とする．この時，$\mathrm{Im}\, f=\mathrm{Aut}^0(X)\cup(\varphi_0\,\mathrm{Aut}^0(X))\cup(\varphi_1\,\mathrm{Aut}^0(X))\cup\cdots\cup(\varphi_r\,\mathrm{Aut}^0(X))$，ただし，$\varphi_0$（または φ_i, $1\leq i\leq r$）は $\varphi_0(y)=-y$（または，$\varphi_i(x)=x$ $1\leq i\leq r$）となるような，X をアーベル多様体とみての自己同型．

証明には[2]で述べた elementary transformation によるモデルの構成法を使う．

さて，f が全射になっても代数群の射としては全射でないかもしれない．すなわち，f が分離的であるかどうかを見なければならない．そのために，$\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}^0(S))\xrightarrow{f_*}\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}^0(X))$ を調べる必要がある．前の $\mathcal{A}ut_S$ を表現する群概型が被約であるならば，$\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}^0(S))\cong H^0(S,\Theta_S)$ であるから，$H^0(S,\Theta_S)$ を計

算して，f_*を調べればよいことになる。問題の群概型が被約かどうか，言いかえれば $\mathrm{Aut}(S)$ が $\mathcal{A}ut_S$ を表現するかどうかは，$\dim H^0(S, \Theta_S) = \dim \mathrm{Aut}(S)$ が成立つかどうかによっている。そこで，$H^0(S, \Theta_S)$ を計算してみると次の様になる。

補題6　(S, X, π) を線織面とする。kの標数をpとする。

(1)　X：有理曲線，$N(S) = -n$　$(n \geqq 0)$ とする。

a)　$n \neq 0 \Longrightarrow \dim H^0(S, \Theta_S) = n+5$.

b)　$n = 0$ (i.e. $S \cong \mathbb{P}^1 \times X$) $\Longrightarrow \dim H^0(S, \Theta_S) = 6$.

(2)　X：楕円曲線，$N(S) = -n$　$(n \geqq -1)$ とする。

c)　$p \nmid n$, $n \neq 0, -1 \Longrightarrow \dim H^0(S, \Theta_S) = n+1$

d)　$p \mid n$, $n \neq 0, -1 \Longrightarrow \dim H^0(S, \Theta_S) = n+2$

e)　$n = 0$, S decomposable, $S \not\cong \mathbb{P}^1 \times X \Longrightarrow \dim H^0(S, \Theta_S) = 2$.

f)　$n = 0$, S indecomposable (i.e. $S \cong P_0$), $p \neq 2$
$\Longrightarrow \dim H^0(S, \Theta_S) = 2$

g)　$n = 0$, S indecomposable, $p = 2 \Longrightarrow \dim H^0(S, \Theta_S) = 3$.

h)　$n = -1$, (i.e. $S \cong P_{-1}$) $\Longrightarrow \dim H^0(S, \Theta_S) = 1$.

i)　$S \cong \mathbb{P}^1 \times X \Longrightarrow \dim H^0(S, \Theta_S) = 4$.

さて，上の結果と定理2，補題4，5を考慮に入れると，上の(d)，(g)の場合に $\mathrm{Aut}(S)$ が $\mathcal{A}ut_S$ を表現していないことがわかる。また問題のf_*が全射になるのは，(a)(b)(e)(f)(i)と(h)で$p \neq 2$の場合であることが，$H^0(S, \Theta_S)$ の元の具体的な形を

みることによりわかる.

定理 3. (S, X, π) を線織面とする.

(1) X: 有理曲線, $N(S)=n$ $(n>0)$ $\Longrightarrow$ 次の代数群としての完全系列*) がある;

$$e \longrightarrow \bar{H}_{n+1} \longrightarrow \mathrm{Aut}(S) \longrightarrow PGL(1) \longrightarrow e.$$

(2) X: 楕円曲線, S: decomposable, $N(S)=0$, $S \neq \mathbb{P}^1 \times X$ $\Longrightarrow$ 次の代数群としての完全系列がある:

$$e \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{Aut}(S) \longrightarrow \mathrm{Aut}'(X) \longrightarrow e,$$

ここで, $\mathrm{Aut}'(X)$ は補題5の(ii)で定義した群であり, G は定理2の(3)の条件をみたすかどうかによって G_m か定理2の(4)の群かのいずれかである. さらに, $\mathrm{Aut}^0(S)$ は, Δ_1, Δ_2 を S の minimal section として $S-\Delta_1-\Delta_2$ に自然に可換群の構造を入れたものである.

(3) X: 楕円曲線, $S \cong \mathcal{P}_0$ $\Longrightarrow$ 次の代数群の完全系列がある:

$$e \longrightarrow G_a \longrightarrow \mathrm{Aut}(S) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X) \longrightarrow e,$$

さらに, $\mathrm{Aut}^0(S)$ は, Δ を S の minimal section として, $S-\Delta$ に自然に可換群の構造を入れたものである.

---

*) $e \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow e$ を代数群の系列とする. これが完全系列であるというのは, G' が G の代数群としての部分群であり, G/G' が代数群として G'' に同型であること.

(4) X：楕円曲線，$S \cong P_{-1}$，kの標数は2でない

$\Longrightarrow$ 次の代数群の完全系列がある；

$$e \longrightarrow \Delta \longrightarrow \mathrm{Aut}(S) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X) \longrightarrow e,$$

ここで，$\Delta \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$．さらに，$\Delta \cap \mathrm{Aut}^0(S) = \Delta$．

証明は今までに述べてきたことを使えばほとんど問題ない．ただ，(4)の最後の主張は，$\mathrm{Aut}^0(S)$の軌跡とファイバーとの交わりをみるために，軌跡となりうる曲線をみつけなければならない．これには少しめんどうな計算がいる．また，(4)の場合でkの標数が2でも，ΔをXの2-torsion partとして，$\mathrm{Aut}(S)/\Delta \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$なる射はできるが，それは決して分離的にならない．

§5．応用

次の問題を考えよう．"線織面が同時に楕円曲面になるのはいつか？" この問題は$k=\mathbb{C}$の時諏訪氏[7]によってとかれているが，自己同型群の立場からみると，一般の代数的閉体の場合でも自然にとける（序参照）結果は次の通りである．

定理4．(S, X, π)を線織面，pをkの標数とする．

(1) S：楕円曲面 $\Longrightarrow$ X：楕円曲線

(2) $p=0$ならば，Sが楕円曲面になるための必要十分条件は次の条件(i),(ii)のいずれかを満足することである；

(i) $S \cong \mathbb{P}_{-1}$

(ii) S decomposable, $N(S)=0$, ΔとSのminimal sectionとして, $\pi(\Delta\cdot\Delta)$がXのJacobi多様体でtorsion elementになっている.

(3) $p>0$ならば, Sが楕円曲面になるための必要十分条件は, 上の(i) (ii)か下の(iii)のいずれかを満足することである.

(iii) $S \cong \mathbb{P}_0$

$S \cong \mathbb{P}_{-1}$の場合multiple fibreを3本もち((2, 2, 2) type), (ii)の場合2本もつ((r, r) type, rは$r\pi(\Delta\cdot\Delta)=0$となる最小のもの)

参考文献

[1] A. Grothendieck. Géométrie formelle geometrie algebrique, F.G.A.

[2] M. Maruyama. On classification of ruled surfaces, Lect. in Math. Dept. Math. Kyoto Univ. 3 Kinokuniya (Tokyo) 1970,

[3] M. Maruyama, On automorphism groups of ruled surfaces, to apper

[4] H. Matsumura, On algebraic groups of birational transformations, Rendiconti Accad. Naz. Lincei 34 (1963).

[5] H. Matsumura, P. Monsky. On the automorphisms of hypersurface. J. Math. Kyoto Univ. Vol 3 (1964).

[6] H. Matsumura, F. Oort, Representability of group functors,

and automorphisms of algebraic schemes, Inv. Math. 4.(1967).
[7] T. Suwa, On ruled surface of genus 1 J. Math. Soc. Japan 21 (1969)